Physikalische Betrachtung des Raketenstarts

In unserem P-Seminar Physik bauten wir Modellbauraketen und ließen sie anschließend am Flugplatz Kramersfeld steigen. Dabei haben wir die Flughöhen der Raketen gemessen. Im Folgenden wollen wir nun auch den Raketenstart und den Massenverlust physikalisch betrachten. Beim Start kommt der Impulserhaltungssatz zum Tragen. Dieser besagt, dass der Gesamtimpuls p in einem geschlossenen System gleichbleiben muss.

Allgemeines

Impulserhaltungssatz:

Der Gesamtimpuls ist immer konstant: $p_{ges} = p_1 + p_2 + \ldots = \text{konstant}$

Das Produkt aus der Masse eines Körpers und seiner Geschwindigkeit bezeichnet man als Impuls p:

$p = m \cdot v$

$0 = p(t) = p(t + dt)$ mit $p(t + dt) = (m - dm) \cdot dv_{Betrachter} + dm \cdot v_g$

Da die Rakete ein abgeschlossenes System ist, gilt der Impulserhaltungssatz. Der Impuls der Rakete ist nur konstant, wenn der Impuls der Rakete zusammen mit dem Impuls des Gasausstoßes betrachtet wird. Vor dem Starten der Rakete ist der Gesamtimpuls 0. Der Impuls der von den Verbrennungsgasen ausgeht, wirkt in die eine Richtung und der Impuls der Rakete in die entgegengesetzte Richtung. Bei der Modellbaurakete kommt es zu keiner konstanten Beschleunigung, weil im Prinzip die relative Gasgeschwindigkeit stets abnimmt, da die Geschwindigkeit zunimmt und sie zum Schluss immer weniger beschleunigt. Deshalb wird es eine abnehmende Beschleunigung genannt. Wegen der Beschleunigung durch den Gasausstoß kann es zu keiner konstanten Geschwindigkeit kommen. Bei Weltraumraketen wird eine sehr hohe Startbeschleunigung benötigt, damit sie das Erdschwerefeld verlassen kann. Dies war bei unseren Raketen nicht nötig, da sie nur etwa 170 Meter hochflogen.

Die Berechnung der Endgeschwindigkeit auch im Zusammenhang mit dem Gasausstoß

Im Laufe des Fluges wird das Schwarzpulver verbraucht und somit findet eine Massenänderung statt. In dieser Gleichung wird nun die Endgeschwindigkeit des Fluges berechnet.

0 = dp = d(mv_R) – (dm)($v_R - v_g$)	Die Impulsänderung dp ist immer 0, weil der Impuls erhalten bleibt (Summenimpuls). Es sind zwei Impulsänderungen, der von der Rakete (d(mv_R)) und der des Gasausstoßes ((dm)($v_R - v_g$)). Der Impuls des Gasausstoßes ist die Massenänderung des Ausstoßes mal der Relativgeschwindigkeit zur Rakete.
0 = dm · v_R + m · dv_R – dm · v_R + dm · v_g	Es wird die Ableitung von d(mv_R) anhand der Produktregel gebildet. Die Ableitung ist eine Veränderung der Formel mit der das Steigungsverhalten ermittelt werden kann. Dies wird benötigt um die Änderung der Raketengeschwindigkeit zu berechnen. (dm)($v_R - v_g$) wird ausmultipliziert dahinter geschrieben.
0 = m · dv_R + dm · v_g	dm · v_R fällt beim Zusammenfassen weg.
=> $dv_R = - v_g \cdot \frac{dm}{m}$	Es wird nach dv_R aufgelöst.

Mit dv_R haben wir die Änderung der Raketengeschwindigkeit ausgerechnet.

Nun berechnen wir die Endgeschwindigkeit der Rakete v_{end} unter Berücksichtigung des Massenverlustes. Die Endgeschwindigkeit ist abhängig von der Masse. Die Masse nimmt während des Fluges ab, aufgrund des Schwarzpulververbrauchs. Um die Endgeschwindigkeit zu berechnen, wird die Massenänderung anhand von einem Integral betrachtet. Der Integral stellt in diesem Fall vereinfacht gesagt die Größe der Massenänderung dar.

$v_R = -v_g \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} = -v_g \left(\ln(m) - \ln(m_0)\right)$	Es wird von m_0 bis m integriert. Das Integral von dv_R ist v_R. v_g ist eine konstante und bleibt deshalb unverändert davorstehen. Nach dem Einsetzen der Integralgrenzen erhält man $-v_g\left(\ln(m) - \ln(m_0)\right)$.

=> $v(m) = v_g \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$	Aufgrund des Logarithmusgesetzes kann nach $v(m)$ umgestellt werden.
$v(t) = v_g \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \frac{dm}{dt} \cdot t}\right)$	Die Geschwindigkeit kann anstatt auf die Masse auch auf die Zeit bezogen werden. $m_0 - \frac{dm}{dt} \cdot t$ die Startmasse minus die Masse die pro Zeiteinheit an Schwarzpulver verbraucht wurde mal t.
$v_{end} = v_g \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_{ohne Treibs toff}}\right)$	Die Endgeschwindigkeit der Rakete bekommt man m durch $m_{ohne Treibs toff}$. Dabei ist $m_{ohne Treibs toff}$ die Endmasse der Rakete.

<u>Legende:</u>

m = Gesamtmasse der Rakete mit Treibstoff

m_0 = Startmasse

d = jeweilige Veränderung

v_g = Gasgeschwindigkeit

v_R = Raketengeschwindigkeit

Relativgeschwindigkeit = wenn die Rakete für den Beobachter von außen eine hohe Geschwindigkeit hat, dann ist der Gasausstoß im Gegensatz zur Gesamtgeschwindigkeit vernachlässigbar ($v_R - v_g$)

Berechnung der Beschleunigung beim Start der Rakete

$v_g \cdot \frac{dM}{dt} = -(M + m - dM) \cdot dv_R$	Massenänderung der Rakete beim Start sehr gering, deshalb dM auf der rechten Seite = 0
$v_g \cdot \frac{dM}{dt} = -m_0 \cdot \frac{dv_R}{dt}$	die Gleichung Gasgeschwindigkeit mal Gasmassenabnahme = Beschleunigung der Rakete mal m. Auflösung nach a_R
$\Rightarrow a_R = \frac{v_g \cdot \frac{dM}{dt}}{m_0}$	Ergebnis ist die Anfangsbeschleunigung, also die Beschleunigung beim Start

Legende:

M = Treibstoffmasse

m = Raketenmasse

m_0 = Startmasse

d = jeweilige Veränderung

v_g = Gasgeschwindigkeit

v_R = Raketengeschwindigkeit

$M + m = m_0$

$\frac{dv_R}{dt} = a_R$

Quellen:

Daniel Ruhstorfer: Facharbeit der Kollegstufe. 2010.

Hans Scheiderer: Physik: Ausbildungsrichtung Technik Fachoberschulen/Berufsoberschulen 11 und 12. Ausgabe Bayern 5. Auflage

Bergmann-Schaefer: Lehrbuch der Experimentalphysik: Die Raketengleichung (als Differential- und Integralrechnung)

Helmut Lindner: Physik für Ingenieure. München 2014.